附錄A　等值靜力風載重基本理論

結構物受到動態外力而產生動態反應，可藉由勁度反推出當最大動態反應發生時，相對應的等值靜力(equivalent static force)。此等值靜力可以使結構物產生一樣的最大動態反應效果，可進一步與靜載重(dead load)、活載重(live load)結合，得到不同設計狀態的載重組合。一般來說，工程師可以根據規範所載明的順、橫風向及扭轉向的設計風力公式，計算目標結構物的設計風載重，並與其他載重設計值做組合進行分析。然而，規範中所載明的目標結構物設計參數通常較為理想化，實際上應用規範之公式或圖表時，傾向獲得保守的設計值。

我國規範參考美國、日本等國際規範進行制定，雖然已經涵蓋了不少外型的結構物，但規範永遠無法涵蓋所有結構物，特別是近年來常出現造型特殊的結構物。再者，規範的計算是以周圍沒有鄰近干擾效應的獨立結構物狀態進行設計風力估算的，與實際風力有所差異。近年來風工程學術界發展了許多有關等值風載重的方法，針對各類結構物進行比較分析，試圖找出不同類型結構物的理想計算方法。

一般而言，高層建築物的等值靜力風載重設計多半以陣風反應因子法(Gust Response/Loading Factor Method)來進行估算。主要原因在於結構物本身的振態十分明顯、振態與振態之間在頻率域上十分分離，以及平均風力與結構物的主要振態相似性高的特性。利用模態分析及 SRSS 法，可以估算出高層建築物的等值設計風力。然而，對於其他類型的結構物來說，很可能因為不具高層建築物的動力特性，因而導致陣風反應因子法所估算出來的結果無法被採用。最明顯的例子即是大跨度屋蓋結構物的等值靜力風載重。對於部分結構頻率較高的大跨度結構物來說，共振反應並不明顯、而且風壓分布具有十分高的空間相關性，因此通常會採用 LRC 法(Load Response Correlated Method)計算背景部分的結構反應，再配合模態慣性力法(Modal Inertial Force Method)計算共振部分的結構反應，並結合平均風載重成為針對某一桿件的某一結構效應對應的等值靜力風載重。

近來也有專家採用 Universal Equivalent Static Wind Load Method 或 POD-based Equivalent Static Wind Load Method 來取代較複雜的 LRC 法。而 Principal Mode Based Equivalent Static Wind Load Method 也逐漸受到重視。等值靜力風載重方法一直以來是風工程學術領域裡的主流題目之一。主要原因在於沒有一個設計載重方法適用於每一種結構載重系統。而由於受風反應來自於背景反應及共振反應的相對比例關係，因此不僅風力的逼近流特性需要注意，風力與結構的互制行為也十分重要。以下針對常用以計算背景反應的 LRC 法以及用以計算共振反應的 MIF 法作介紹，最後再說明結合方式。

背景反應：LRC 法

M. Kasperski 於 1992 年提出適用於可能產生幾何非線性結構反應的大跨徑結構物的設計風載重方法，其設計載重分佈是根據由與結構反應與載重之間的相關性推導而得。結構物的極值反應可表示為反應平均值加上反應標準差與尖峰因子的乘積，其基本理論簡述如下：

$$r_{max} = \bar{r} \pm g_r \cdot \sigma_r \tag{A.1}$$

其中$\bar{r}$為反應平均值；σ_r為反應標準差；g_r為反應尖峰因子。反應尖峰因子對於低阻尼結構而言，其值多介於 3.5～4.0 之間。倘若等值靜態風載重採用陣風反應因子(Gust Response Factor)的模式，則陣風反應因子G為反應最大值與反應平均值的比值，如下式：

$$G = \frac{r_{max}}{\bar{r}} \tag{A.2}$$

如是，等值風載重設計即為陣風反應因子與載重平均值的乘積：

$$P_e = G \cdot \bar{p} \tag{A.3}$$

一個結構系統的平均反應與平均載重之間可視為基本的靜力關係：

$$\{\bar{r}\} = [A] \cdot \{\bar{p}\} \tag{A.4}$$

其中$\{\bar{r}\}$為平均反應向量，因次為(n×1)；$[A]$為影響係數矩陣，因次為(n×m)；a_{ik}為影響係數在k施加單位載重時，i點所產生的反應值；$\{\bar{p}\}$為平均載重向量，因次為(m×1)。結構反應的變異數矩陣(Covariance matrix)可以表示如下：

$$[\sigma_r^2] = [A] \cdot [\sigma_p^2] \cdot [A]^T \tag{A.5}$$

其中$[\sigma_r^2]$為反應的變異數矩陣(Covariance matrix)，因次為(n×n)；$[\sigma_p^2]$為載重的變異數矩陣，因次為(m×m)；$[A]^T$為矩陣$[A]$的轉置矩陣。由(A.4)式可知，i節點的反應與k節點的載重的交相關變異數矩陣可寫為影響係數矩陣乘上載重的交相關變異數矩陣，如下所示：

$$[\sigma_{rp}^2] = [A] \cdot [\sigma_p^2] \tag{A.6}$$

其中，$[\sigma_{rp}^2]$為載重與反應的交相關變異數矩陣，因次為(n×m)；矩陣元素(i,k)為反應i與載重k的交相關變異數；$[\sigma_p^2]$為載重的變異數矩陣，因次為(m×m)，矩陣元素(k,l)為載重k與載重l的交相關變異數。因此，式(A.1)可以改寫為：

$$r_{i,max} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \bar{p}_k + \mathrm{g} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} a_{ik} \cdot a_{il} \cdot \sigma_{p_{kl}}^2} \tag{A.7}$$

其中$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \bar{p}_k$由式(A.4)而來，為反應平均值部份；而$\mathrm{g} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} a_{ik} \cdot a_{il} \cdot \sigma_{p_{kl}}^2}$是由式(A.5)而來，為反應標準差乘上尖峰因子。再將式(A.5)帶入式(A.7)，重新整理可得：

$$r_{i,max} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \bar{p}_k + \mathrm{g} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot \sigma_{p_{kl}}^2}{\sigma_{r_i p_k}} \tag{A.8}$$

由式(A.6)可得：

$$\sigma_{r_i p_k}^2 = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot \sigma_{p_{kl}}^2 \tag{A.9}$$

$$\rho_{r_i p_k} = \frac{\sigma_{r_i p_k}^2}{\sigma_{r_i} \cdot \sigma_{p_k}} \tag{A.10}$$

其中$\rho_{r_i p_k}$為反應i與載重k的相關係數；σ_{p_k}為載重k的標準差。將式(A.9)與式(A.10)重新整理可得：

$$\sigma_{r_i p_k}^2 = \sum_{l=1}^{m} a_{il} \cdot \sigma_{p_{kl}}^2 = \rho_{r_i p_k} \cdot \sigma_{r_i} \cdot \sigma_{p_k} \tag{A.11}$$

再將式(A.11)代入(A.8)，可以得到：

$$r_{i,max} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \bar{p}_k + \mathrm{g} \cdot \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \rho_{r_i p_k} \cdot \sigma_{p_k} \tag{A.12}$$

或

$$r_{i,max} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot \left[\bar{p}_k + \mathrm{g} \cdot \rho_{r_i p_k} \cdot \sigma_{p_k}\right] \tag{A.13}$$

由式(A.13)可以看出，$[\bar{p}_k + \mathrm{g} \cdot \rho_{r_i p_k} \cdot \sigma_{p_k}]$部份就是為造成設計結構物極大反應的等值風載重，即為 LRC 法的設計風載重。從上述推導公式可以發現，基於觀察結構反應$r_{i,max}$可以利用 LRC 法求得等值靜載重；倘若

欲觀察的結構反應不只一個，則會建立出多組等值靜載重。因此採用 LRC 法進行風載重設計時，極需要工程師對於結構系統的孰悉度以及經驗。此外，LRC 法目前已經納入 ISO 4354:2009 規範中，正式成為許多國際社會採用的設計方法之一。

共振反應：MIF 法

共振反應的估算是透過慣性力分佈估算各振態的貢獻累加而得，必須考慮多個振態才能近似真實解。一般而言，共振反應多是低頻振態所貢獻，高頻振態影響可忽略。根據隨機振動理論，外力交頻譜S_{ij}^C與位移反應頻譜S_m之關係為：

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\phi_{im}\phi_{jm}S_{ij}^C}{16\pi^4 {n_m}^4 M_m^2\left\{\left[1-\left(\frac{n}{\tilde{n}_m}\right)^2\right]^2+\left[2\xi_m\left(\frac{n}{\tilde{n}_m}\right)\right]^2\right\}} \tag{A.14}$$

其中m表示為結構振態順序編號，$\tilde{n}_m$為第m振態的有效頻率，S_{ij}^C為節點i與j間的風力交頻譜，n_m為結構共振頻率，ϕ_m為結構第m振態的形狀函數，ξ為第m振態的有效阻尼比，M_m為第m振態的廣義質量矩陣。廣義振態位移反應為式(A.14)在頻率域上之積分，可得第m振態之振態位移反應變異數$\sigma_{r,m}$，表示式如下：

$$\sigma_{r,m}^2 = \left(\int S_m\,dn\right) \tag{A.15}$$

在隨機振動理論上，若將外力視為一白噪音訊號，對應頻率上的能量視為各自獨立，故在考量不同振態的情形下，第m振態之轉換函數將可將式(A.14)及式(A.15)合併為式(A.16)。第m振態的位移反應變異數$\sigma_{r,m}^2$寫成：

$$\sigma_{r,m}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\phi_{im}\phi_{jm}S_{ij}^C(n_m)}{64\xi_m\pi^3{n_m}^3M_m^2} \tag{A.16}$$

一般而言，大跨度結構物具有多個結構振態貢獻度相似的情況，因此在考量結構極值反應的時候，我們可以結合式(A.13)中的$\left[\bar{p}_k+\mathrm{g}\cdot\rho_{r_ip_k}\cdot\sigma_{p_k}\right]$及式(A.16)的結合，改寫為式(A.17)：

$$r_{max} = \bar{r} + \sqrt{\left(g_B\sigma_{r,B}\right)^2 + {g_R}^2\sum_{m=1}^{Q}\sigma_{r,R_m}^2} \tag{A.17}$$

其中g_B為背景反應的尖峰因子，可以由來流的風場作用時間及陣風反應時間決定；$\sigma_{r,B}$為式(A.13)的$[\rho_{rF}]\times[\sigma_F]$部分；$g_R$為共振反應的尖峰因子部分，可以由風力作用時間與結構振態頻率來決定；$\sum_{m=1}^{Q}\sigma_{r,R_m}^2$表示為前$Q$個振態共振反應的總和，可以由式(A.16)決定。其中值得注意的是，由 LRC 法決定的背景反應可以由工程師根據其豐富的設計經驗決定以哪種桿件內力為設計依據，但決定共振反應的慣性力卻由位移反應來做決定，因此此兩種不同反應的結合在式(A.17)不相容。因此，有必要利用不同結構反應的影響函數矩陣，來轉換式(A.16)的位移反應變異數成為與 LRC 法相符的其他結構反應的變異數。

結合平均風力、背景風力、共振風力之等值靜力風載重

式(A.17)為綜合平均反應、背景反應、及共振反應之極值反應結果。根據式(A.4)中影響係數矩陣$[A]$，可轉換極值反應為等值靜力風載重。或者可以下式估算之。

$$p_{k,eq} = \bar{p}_k \pm \sqrt{\left(g_B\sigma_{F,B,k}\right)^2 + \left(g_R\sigma_{F,R,k}\right)^2} \tag{A.18}$$

其中$p_{k,eq}$為針對結構反應k的等值靜力風載重；$\bar{p}_k$為平均風力；$g_B\sigma_{F,B,k}$為背景風力；$g_R\sigma_{F,R,k}$為共振風力。g_B和g_R分別為背景尖峰因子及共振尖峰因子。式子右邊的正負號由平均風力的正負號決定，以造成保守之極值風力為原則。